

ANÁLISE DE EXTREMOS E SOBRE-SINAL EM UM SISTEMA DE CONTROLE DE QUARTA ORDEM COM UM PÓLO REAL DE MULTIPLICIDADE QUATRO E UM ZERO REAL DUPLO.

Márcio José Ferreira, Célia Aparecida dos Reis, Dário Monte Alegre – Matemática Aplicada – Licenciatura em Matemática - Departamento de Matemática - Faculdade de Engenharia - Campus de Ilha Solteira.

Segundo Dorf (1995), o uso dos sistemas de controle tem uma história fascinante. Um lampião de óleo inventado por Philon a aproximadamente 250 a.C. usava um regulador de bóia para manter constante o nível de óleo combustível. Dennis Papin inventou o primeiro controlador de pressão para caldeiras a vapor em 1681 e, o primeiro controlador automático com retroação usado em um processo industrial é geralmente aceito como sendo o regulador de esferas de James Watt, desenvolvido em 1769 para controlar a velocidade de máquinas a vapor.

Antes da Segunda Guerra Mundial o principal incentivo para o uso de retroação nos Estados Unidos foi o desenvolvimento do sistema telefônico e dos amplificadores eletrônicos. Foi durante a segunda guerra mundial que a teoria e a prática do controle automático receberam um grande estímulo, com a necessidade de se projetar e construir pilotos automáticos para aviões, sistemas de posicionamento de canhões, sistemas de controle para antenas de radar e outros sistemas militares.

Nos dias atuais, o controle automático é essencial no estudo de sistemas de veículos espaciais, guiamento de mísseis, pilotagem de aviões, robóticos e outros, além de ser aplicado em modernos processos industriais e de fabricação, sistemas biológicos, biomédicos, econômicos e socioeconômicos (Franklin, 1991; Dorf, 1995; Ogata, 2005). Um exemplo a ser considerado é o caso da espaçonave Mars Pathfinder, enviada ao espaço pela NASA com destino a Marte, o qual atingiu a superfície deste planeta em 4 de julho de 1997, com uma velocidade de aproximadamente 18 m/s. O veículo era controlado por operadores na Terra a partir de imagens obtidas por ele mesmo. O controle das manobras visava o mínimo consumo de energia.

Existem alguns problemas como, por exemplo, o de controle de aplicação de insulina, o de controle do eixo de máquinas ferramentas e os de controle de um robô, os quais necessitam seguir uma trajetória pré-definida, onde a resposta a degrau não pode apresentar extremos. Assim, o estudo de condições que permitam avaliar extremos na resposta a degrau, é de grande importância na teoria de controle, segundo (Ogata, 2005; El-Khoury, 1993; Howell, 1997; Rachid, 1995; Reis, 2006, 2005).

Muitas contribuições teóricas recentes têm sido feitas no sentido de clarificar a influência dos zeros e das localizações de pólos e zeros da planta na parte transiente da resposta a degrau (El-Khoury, 1993; Ferreira 2006; Howell, 1997; Rachid, 1995; Reis, 2006, 2005). Apesar de bastante valiosas, essas contribuições ainda não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar o sobre-sinal. Por exemplo, o problema de se determinar o número exato de extremos da resposta a degrau permanece em aberto e mesmo determinando-os, não existe uma técnica que permita classificá-los, ou seja, faltam condições necessárias e suficientes para a prova da existência de sobre-sinal. Além disso, para sistemas de controle de ordem maior ou igual a três, não é possível a determinação direta de extremos, já que a resposta a degrau é uma função transcendental.

Neste trabalho, efetuou-se a análise, em termos de extremos e sobre-sinal, da resposta a uma entrada degrau unitário de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, de quarta ordem, com um pólo real de multiplicidade quatro e um zero real duplo, cuja função de transferência $G(s)$ é apresentada a seguir:

$$G(s) = \frac{(Ts + 1)^2}{(\tau s + 1)^4}, \quad (1)$$

sendo que:

- $T > 0$, é uma constante real e τ é a constantes de tempo do sistema;
- $z = -1/T$ e $\lambda = -1/\tau$ são respectivamente o zero e o pólo de $G(s)$, com $\lambda \neq z$.

Considera-se que o tempo t pertença ao intervalo $(0, +\infty)$ e que $\lambda < 0$, já que o sistema é estável. É conveniente classificar os zeros de $G(s)$, dada por (1), em três diferentes conjuntos, a saber:

$$M_1 = \{z: G(z) = 0, 0 < z < +\infty\}, M_2 = \{z: G(z) = 0, \lambda < z < 0\} \text{ e } M_3 = \{z: G(z) = 0, -\infty < z < \lambda\}.$$

Observa-se que o número de zeros de $G(s)$ dada por (1), pertencentes a cada classe M_i , $i = 1, 2, 3$, é no máximo um, pois $G(s)$ apresenta um único zero.

O Lema, dado a seguir, fornece a resposta a uma entrada degrau unitário, para a classe de sistemas cuja função de transferência tem a forma dada por (1).

LEMA 1: A resposta a uma entrada degrau unitário da classe de sistemas de controle linear, cuja função de transferência seja dada por (1), tem a forma:

$$y(t) = 1 + c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t} + \frac{c_3}{2} \cdot t^2 \cdot e^{\lambda t} + \frac{c_4}{6} \cdot t^3 \cdot e^{\lambda t} \quad (2)$$

sendo que:

$$c_1 = -1, \quad c_2 = \lambda, \quad c_3 = \frac{\lambda^2}{z^2}(\lambda^2 - z^2) \quad \text{e} \quad c_4 = \frac{\lambda^3}{z^2}(\lambda - z)^2. \quad (3)$$

Têm-se, então, os seguintes resultados principais, os quais fornece condições necessárias e suficientes para a análise, classificação dos pontos críticos da resposta a uma entrada degrau unitário, relativos ao sistema (1), além da determinação de sobre-sinal.

TEOREMA 1: Seja $y(t)$, dada por (2), a resposta a uma entrada degrau unitário do sistema cuja função de transferência $G(s)$ é apresentada em (1). Têm-se os seguintes resultados para η , o número de extremos de $y(t)$;

- (i) $\eta = 2$ se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$;
- (ii) $\eta = 0$ se e somente se $z \in M_3$.

TEOREMA 2: Sob as hipóteses do Teorema 1, tem-se que $y(t)$ possui um ponto de máximo absoluto em t_1 e um ponto de mínimo absoluto em t_2 , $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$, se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$;

TEOREMA 3: Sob as hipóteses anteriormente postas, tem-se que $y(t)$ pode apresentar sobre-sinal se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$;

COROLÁRIO 1: Sob as hipóteses anteriormente postas, tem-se que, $y(t)$ dada por (2), não apresenta sobre-sinal se e somente se $z \in M_3$.

A seguir, serão apresentadas as provas dos Teoremas 1 e 2.

Prova do Teorema 2: Para análise dos pontos críticos de $y(t)$, torna-se necessário a análise de $y'(t)$, sua derivada primeira. De (2), tem-se que:

$$y'(t) = \left\{ \left[\frac{\lambda^4}{z^2} t \right] + \left[\frac{\lambda^4}{z^2} (\lambda - z) \right] t^2 + \left[\frac{\lambda^4}{6z^2} (\lambda - z)^2 \right] t^3 \right\} e^{\lambda t}. \quad (4)$$

Multiplicando esta expressão por $\frac{z^2}{\lambda^4 \cdot e^{\lambda t}}$, obtém-se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t + (\lambda - z)t^2 + \frac{1}{6}(\lambda - z)^2 t^3 = 0. \quad (5)$$

Seja $f(t)$ a função definida, a partir de (5), como:

$$f(t) = t + (\lambda - z)t^2 + \frac{1}{6}(\lambda - z)^2 t^3. \quad (6)$$

De (5) e (6), observa-se que os pontos críticos de $y(t)$ são os pontos $t_o \in (0, +\infty)$ para os quais $f(t_o) = 0$, isto é, os pontos críticos de $y(t)$ são as raízes de $f(t)$. Além disso,

$$f(t) = \frac{y'(t) \cdot z^2}{e^{\lambda \cdot t} \cdot \lambda^4}. \quad (7)$$

De (6), tem-se que:

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{\lambda - z} \quad \text{ou} \quad t_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{\lambda - z}. \quad (8)$$

Como o interesse é apenas em $t \in (0, +\infty)$, segue que $t_1, t_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda < z \Leftrightarrow \lambda < z < 0$ ou $\lambda < 0 < z$ ou seja, se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$. Conclui-se então que $y(t)$, dada por (2), possui zero ponto crítico se e somente se $z \in M_3$ ou dois pontos crítico se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$, o que prova o Teorema 1.

Segue, agora, a prova do teorema 2.

Prova do Teorema 2: Suponha que $z \in M_1$ ou $z \in M_2$. Então, de (8), segue que t_1 e t_2 são os únicos pontos críticos de $y(t)$ pertencentes ao intervalo $(0, +\infty)$.

Agora, de (6), segue que $f(0) = 0$ e $\frac{1}{6}(\lambda - z)^2 > 0$ daí, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. A figura abaixo mostra o gráfico de $f(t)$.

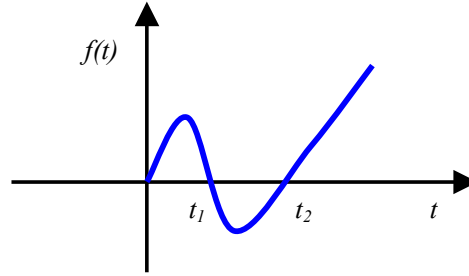


Figura 1: Gráfico de $f(t)$ (6).

Agora, como $f(t) > 0$ se $t < t_1$, de (7), segue que $y'(t) > 0$ se $t < t_1$. Além disso, $f(t) < 0$ se $t > t_1$, então $y'(t) < 0$ se $t > t_1$. Portanto, $y(t)$ possui um ponto de máximo relativo em t_1 . Como $f(t) < 0$ se $t < t_2$, então $y'(t) < 0$ se $t < t_2$. Além disso, $f(t) > 0$ se $t > t_2$, então $y'(t) > 0$ se $t > t_2$. Portanto, $y(t)$ possui um ponto de mínimo relativo em t_2 . Além disso, t_1, t_2 são extremos absolutos, pois, caso contrário, $y(t)$ possuiria mais de dois pontos críticos, o que não ocorre pelo Teorema 1.

Suponha, agora, que $y(t)$ possui um ponto de máximo absoluto em t_1 e um ponto de mínimo absoluto em t_2 . Como $y(t)$ possui zero ponto crítico ou dois pontos críticos, segue que $\eta = 2$, obrigatoriamente e, portanto, pelo Teorema 1, $z \in M_1$ ou $z \in M_2$, o que conclui a prova.

Exemplo: Considere o sistema de controle linear estável de quarta ordem, com um pólo real de multiplicidade quatro e um zero real duplo, cuja função de transferência $G(s)$ seja dada por:

$$G(s) = \frac{(10s + 1)^2}{(s + 1)^4}. \quad (9)$$

$G(s)$ possui zero $z = -0,1$ e pólo $\lambda = -1$. Como $z \in M_2$, pelo Teorema 1, $\eta = 2$ e pelo Teorema 3, $y(t)$ pode apresentar sobre-sinal. A Figura 2 – (a), a seguir, mostra o gráfico da resposta a uma entrada degrau unitário $y(t)$, deste sistema. Observa-se a ocorrência de sobre-sinal superior a 150 %. Para $z = 0,1$ e pólo $\lambda = -1$ em (9). Como $z \in M_1$, pelo Teorema 1, $\eta = 2$ e pelo Teorema 3, $y(t)$ pode apresentar sobre-sinal. A Figura 2 – (b), a seguir, mostra o gráfico da resposta a uma entrada degrau unitário $y(t)$, deste sistema. Observa-se que neste caso não ocorre sobre-sinal.

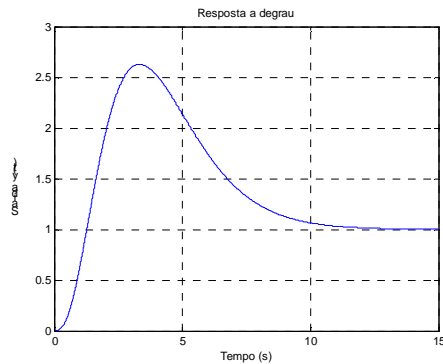


Figura 2 - (a): Resposta a Degrau Unitário para $G(s)$ (9).

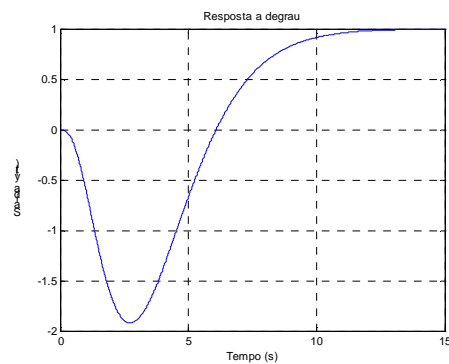


Figura 2 - (b): Resposta a Degrau Unitário para $G(s)$ (9).

Foram obtidas, condições necessárias e suficientes para, análise e classificação dos extremos e sobre-sinal da resposta a uma entrada degrau unitário em sistemas de controle lineares monovariáveis estáveis, contínuos no tempo, de quarta ordem, com um pólo real de multiplicidade quatro e um zero real duplo, em função das posições relativas dos pólos e zeros de $G(s)$. Apresenta-se, também, uma técnica para análise e classificação de tais extremos. Tal técnica se resume em transferir a análise de pontos críticos da resposta a degrau para a determinação dos zeros de uma função auxiliar definida a partir da derivada de $y(t)$. Isso permite a análise e classificação dos pontos críticos do sistema, mesmo nas situações em que os mesmos não podem ser determinados diretamente. A importância disso reside no fato de que, na maioria dos casos, a resposta a degrau é uma combinação de mais de três exponenciais, não permitindo nem a determinação nem a quantificação de seus extremos. No entanto, isso é possível através da função auxiliar.

Observa-se que os resultados obtidos podem ter várias aplicações em engenharia de controle e podem, por exemplo, ser usados em projetos de controladores sem sobre-sinal para a resposta a degrau de malha fechada de um sistema linear de fase mínima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dorf R. C. & Bishop R. H. (1995). *Modern Control Systems*, 7 ed. Addison-Wesley, New York.
- El-Khoury, M. et al. (1993). Influence of Zero Locations on the Number of Step-response Extrema. *Automatica*, vol. 29, nº 6, pp. 1571-1574.
- Ferreira, M. J., Reis, C. A., Monte Alegre, D., Silva N. A. P., (2006). Análise de Extremos, Sobre-Sinal e a Reação Reversa em Sistemas de Controle Lineares Estáveis de Quarta Ordem. *DINCON 2006, 5º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Guaratinguetá, S.P.
- Franklin, G. F. et alii, (1991) *A. Feedback Control of Dynamic Systems*, 3ed. Addison-Wesley, New York.
- Howell, J. R. (1997). Some classes of Step-response Model Without Extrema. *Automatica*, vol. 33, nº 7, p. 1427 - 1428.
- Ogata, K. (2005) *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro.
- Rachid, A. (1995). Some conditions on zeros to avoid step-response extrema. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, nº 8, pp. 1501-1503.
- Reis, C. A., Silva, N. A. P., Ferreira, M. J. (2005). O Sobre-Sinal e a Reação Reversa em Sistemas de Controle Lineares Estáveis e Contínuos de Terceira Ordem Com Pólos Distintos e Um Zero Real Simples. *Anais do DINCON 2005, 4º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 6 - 10 de junho de 2005, Baurú, S.P.
- Reis, C. A., Monte Alegre, D., Ferreira, M. J., Silva N. A. P., (2006). Análise de Sobre-Sinal e Reação Reversa em Sistemas de Controle Lineares, Contínuos no Tempo, de Terceira Ordem Com Um Zero Real e Um Pólo Real, Ambos de Multiplicidade Dois. *DINCON 2006, 5º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Guaratinguetá, S.P.
- Vidyasagar, M. (1986). On Undershoot and Nonminimum Phase Zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, nº 5, pp. 440.